Samfléttar víðáttur

Breki Pálsson

26. Mars 2021

Útdráttur

Í þessari grein munum við skoða aðferðir Lagrange og Hamiltons í klassískri aflfræði, skilgreina ýmis grunnhugtök í diffurrúmfræði og skilgreinum síðan samflétta víðáttu. Við skoðum hvernig sú skilgreining gefur af sér náttúrulega leið til að tengja aflfræði Hamiltons við almennar víðáttur. Við endum á að skoða dæmi um hreyfingu á víðáttu, fyrst með aðferðum Newtons og síðar aðferðum Hamiltons.

1 Grundvöllur

Aflfræði Newtons gjörbylti vísindaheiminum þegar hún kom fyrst fram. Síðar komu nýjar hugmyndir sem leiddu í ljós önnur sjónarhorn á sömu vandamálum. Eftir því sem vandarmálin urðu flóknari þá varð nauðsynlegt að binda saman diffurrúmfræði og eðlisfræði. Markmið fyrsta kaflans er að kynna þau hugtök sem leyfa okkur að skilgreina aflfræði Hamiltons í breiðara samhengi á svokölluðum víðáttum.

1.1 Eðlisfræði

Flestir eru kunnugir lögmálum Newtons en þau leggja grunninn að aflfræði eins og flestir framhaldskólanemendur þekkja hana. Þau lögmál kveða á um að hlutir hreyfist með tiliti til tíma og að kraftar verki á þá. Annað lögmál Newtons tengir saman kraft og hreyfingu hlutar með annars stigs diffurjöfnunni

$$F(\gamma(t), t) = ma(t) \tag{1}$$

Þar sem $a = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ og γ er ferill sem lýsir hreyfingu hlutarins.

Á tímum Newtons var aðallega hugsað um hreyfingu í tengslum við massa hluta og krafta sem verka á hluti og reynast þau fræði vel þegar fengist er við áþreifanleg verkefni. Hins vegar þegar eðlisfræðingar fóru að skoða aflfræði himintungla skapaðist þörf á almennari aðferð til að fást við slík verkefni. Þetta leiddi til þess farið var að nýta tengsl hreyfingar við skriðþunga í stað þess að líta á kraft og massa. Önnur mikilvæg framþróun í aflfræði var að hún varð ekki eins háð tilteknu hnitakerfi, sem auðveldaði notkun í mismunandi kerfum.

Joseph-Louis Lagrange var brautryðjandi á hinum ýmsu sviðum stærðfræðinnar, þar á meðal í aflfræði. Hann gaf út ritið *Mécanique analytique* á árunum 1788-89 þar sem litið er á aflfræði frá öðru sjónarhorni en tíðkast hafðist á tímum Newtons. Í stað þess að nota vigurgilt fall (kraftafall F) til ákvarða hreyfingu hlutar notar hann raungilt fall. Ólíkt forverum sínum notfærir Lagrange sér ekki rúmfræðileg rök til að sýna fram á niðurstöður sínar. Hann orðar það sjálfur á fyrstu tveimur blaðsíðum ritsins:

> *Í þessu riti eru engar myndir, þær aðferðir sem ég mun útskýra þurfa hvorki rúmfræðilegar né aflfræðilegar túlkanir, heldur aðeins algebrulegar aðferðir sem tengjast reglulegri og samfelldri framrás. [3, p.1]*

Við skulum skoða þessar hugmyndir í því tilfelli þegar kerfið okkar er geymið og lýsir hreyfingu í $\mathbb{R}^3$. Þá er til fall $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ með þann eiginleika að $F = -\nabla U$.

Skilgreining 1.1. Látum I vera bil í $\mathbb{R}$ og $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ vera þjála vörpun sem lýsir hreyfingu hlutar. Fallið $U : I \to \mathbb{R}$ sem hefur þann eiginleika að

$$F(\gamma(t), t) = -\nabla U(\gamma(t))$$

kallast stöðuorka hlutarins. Vörpunin $T : I \to \mathbb{R}$ kallast hreyfiorka hlutarins og er skilgreind með eftirfarandi jöfnu:

$$T(t) = \frac{1}{2} m(v \cdot v)$$

þar sem $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = v$ kallast hraði hlutarins. Við köllum svo $E = U + T$ heildarorku hlutarins.

Setning 1.2. *(Geymni orku) Ef $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ er þjál vörpun sem lýsir hreyfingu hlutar með hreyfiorku T og stöðuorku U þá er heildarorka hlutarins*

$$E(t) = T(t) + U(\gamma(t))$$

fasti á I.

Sönnun:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} &= \nabla U \cdot v + \frac{1}{2} m(a \cdot v + v \cdot a) \\ &= -ma \cdot v + ma \cdot v = 0 \end{aligned}$$

$\square$

Þetta er áhugaverð niðurstaða en hún gildir ekki almennt. Ef við bætum til dæmis núningi við kerfið okkar þá fáum við ekki þessa niðurstöðu.

Nú skulum við skoða hugmyndir Lagrange. Þá er jöfnu (1) hér að ofan, sem tengir hreyfingu hlutar við kraftafall sem er vigurgilt, breytt í jöfnu sem tengist í stað raungildu falli L.

Setning 1.3. *Þjál vörpun $\gamma : I \to V$ sem lýst er með $\gamma(t) = (q_1(t), ..., q_n(t))$ er lausn á hreyfijöfnunni $ma = -\nabla U$, þar sem U er stöðuorka, T er hreyfiorka og $L(q, v) = T(v) - U(q)$ þ.þ.a.a.*

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial v_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, .., n.$$

Við köllum L Lagrange-fall.

Þessi niðurstaða er heldur mikilvæg og hægt er að sjá sönnunina á henni í [2, bls. 437-443]. Með þesssari aðferð er rúmfræðilegt túlkun yfirfærð á tungumál algebru og stærðfræðigreiningar. Þá er kraftafallið, sem er vigurgilt, yfirfært á Lagrange-fall sem er raungilt.

Við höfum því fall L sem tekur inn stök sem segja til um staðsetningu hlutarins og svo hraða hans í þeim punkti. Þetta gefur okkur í raun $2n$ breytur (q, v). Við höfum því n-hlutafleiðujöfnur af öðru stigi sem segja okkur til um hreyfinguna.

Hugmyndin um að vinna með raungilt fall í stað vigurgilds kraftafalls til að ákvarða hreyfingu leiddi til frekari framþróunar. Einn þeirra sem hafði mikil áhrif á þessi fræði var William Rowan Hamilton. Hann ruddi síðar brautina að almennri aflfræði sem átti eftir að hafa mikil áhrif á skammtafræði.

Skilgreining 1.4. Skilgreinum fall $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ þannig að

$$H(q, p) = (\sum_{i=1}^{n} p_i v_i) - L(q, v(q, p))$$

Köllum þetta fall Hamilton-fall.

Aflfræði Hamiltons er frábrugðin aflfræði Lagrange þar sem Hamilton-fall notar upplýsingar um staðsetningu og skriðþunga (q, p) í stað þess að nota upplýsingar um staðsetningu og hraða (q, v). Við getum nú fengið samsvarandi diffurjöfnur fyrir Hamilton-fall sem lýsa hreyfingu hlutarins.

Setning 1.5. *Látum $\gamma : I \to V \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ vera þjála vörpun og látum L vera lagrange-fall og H vera Hamilton-fall kerfisins. Þá er $q, p = (\gamma, v)$ lausn á $ma = -\nabla U$, þ.þ.a.a. $(q,p) = (x, \frac{\partial L}{\partial v})$ eru lausnir á eftirfarandi $2n$ diffurjöfnum*

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i = 1, ..., n$$

Sönnun:

$$\begin{aligned} dH &= d(\sum p_i v_i - L) \\ &= \sum p_i dv_i + \sum (v_i dp_i) - \sum (\frac{\partial L}{\partial q^i}) - \sum (\frac{\partial L}{\partial v_i} dv_i) \\ &= \sum (v_i dp_i) - \sum (\frac{\partial L}{\partial q_i} dq^i), \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} \end{aligned}$$

Ef við horfum á sérhvern stuðul fyrir sig í dH og svo samsvarandi stuðul í $\sum(v_i dp_i) - \sum(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq^i)$ þá fáum við eftirfarandi jöfnur:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, (i = 1, ..., n)$$

□

Þetta er því enn önnur leið til þess að hugsa um hreyfingu með tilliti til staðsetningar og skriðþunga. Við skulum athuga að við höfum nú $6 = 2n$ diffurjöfnur af fyrsta stigi í stað þess að hafa $3 = n$ diffurjöfnur af öðru stigi. Það getur verið þægilegra að leysa aflfræðidæmi í þessari útfærslu en það þarf ekki að vera. Það sem er hins vegar merkilegt við þessa framsetningu er að hún nýtir sér samhverfur í kerfinu sem gera okkur kleift að sýna fram á niðurstöður eins og setningu Noether[6, p. 467] á skýrari hátt.

Þegar unnið er með Lagrange-fall eða Hamilton-fall þá er ekki lengur einungis horft á hnit sem samsvara staðsetningu. Í stað þess er horft á stærra hnitakerfi sem nýtir sér bæði staðsetningu, sem í okkar tilfelli notar þrjár breytur, og þar að auki þrjár breytur sem lýsa annaðhvort hraða eða skriðþunga. Við köllum rúm allra mögulegra ástanda á kerfi ástandsrúm þess. Ástandsrúm í aflfræði Lagrange er því rúm allra mögulegra staðsetninga og hraða sem er þá $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^{2n}$ og ástandsrúm í aflfræði Hamiltons er því rúm allra mögulegra staðsetninga og skriðþunga sem er eins $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^{2n}$. Ástandsrúmið í aflfræði Hamiltons er oft kallað fasarúm.

1.2 Diffurrúmfræði

Mikilvægt er að lesandi hafi undirstöðu til að skilja textann og því skulum við taka hjáleið til að undirbúa okkur undir að takast á við aflfræði á víðáttum.

Skilgreining 1.6. Grannmótun f kallast diffurmótun ef f og f^{-1} eru bæði þjál föll.

Skilgreining 1.7. Víðátta er firðrúm $\mathcal{M}$ sem hefur þann eiginleika að til sé $k \in \{1, 2, ..\}$ þannig að fyrir sérhvert $p \in \mathcal{M}$ þá er til grennd U um p þannig að U er diffurmóta $\mathbb{R}^k$. Við segum þá að víðátta sé k-víð og táknum hana stundum $\mathcal{M}^k$.

Þegar hugtakið diffur er skoðað þá erum við í raun að nálga vörpun í grennd við einhvern punkt sem línulegt fall. Diffurrúmfræðin gerir okkur kleift að útvíkka þetta hugtak sem gerir okkur kleyft að nálga föll á víðáttum sem geta oft verið framandi. Dæmi um víðáttu er hnöttur. Þó er mikilvægt að hafa í huga að staðbundnir eiginleikar eru ekki endilega víðfemir, t.d. jörðin er flöt í grennd við okkur en hún er í raun kringlótt.

Skilgreining 1.8. Látum $\mathcal{M}$ vera n-víða víðáttu. Tvenndin (U, x) af opnu mengi $U \subseteq \mathcal{M}$ og diffurmótun $x : U \to \mathbb{R}^n$ kallast *kort* á $\mathcal{M}$.

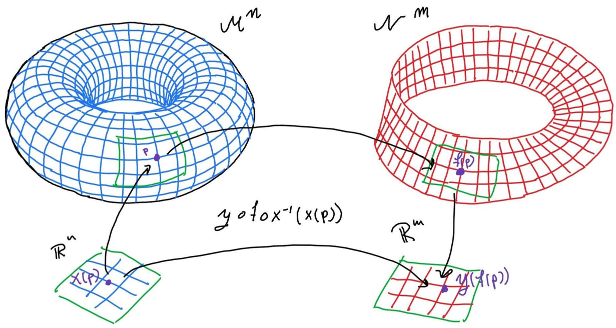
Við skulum svo skilgreina kortasafn lauslega. Kortasafn er samansafn af kortum sem eru þjál og eru diffurmóta á svæðum sem þau skerast á , þ.e. að það er alltaf hægt að komast úr einu kortasafni í annað á þjálan hátt ef kortin skerast (sjá mynd 1.2). Við segjum að kortasafn sé óstækkanlegt ef það er ekki eiginlegt hlutmengi í öðru stærra kortasafni.

Skilgreining 1.9. Víðátta $\mathcal{M}$ ásamt óstækkanlegu kortasafni kallast diffranleg víðátta.

Næst skoðum við varpanir milli víðátta.

Skilgreining 1.10. Vörpun $f : \mathcal{M}^n \to \mathcal{N}^m$ er sögð vera *þjál* ef fyrir sérhvert kort (x, U) á $\mathcal{M}^n$ og sérhvert kort (y, V) á $\mathcal{N}^m$, þá er vörpunin $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to y(V) \subseteq \mathbb{R}^m$ þjál. Við segjum einnig að f sé þjál í punktinum $p \in \mathcal{M}$ ef $y \circ f \circ x^{-1}$ er þjál í $x(p)$.

Þetta er leið til þess að breyta falli $f : \mathcal{M}^n \to \mathcal{N}^m$ í fall $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sem getur gefið okkur upplýsingar um fallið f því að við vitum vel hvernig föll eins og g haga sér sjá mynd 1. Næst skoðum við mikilvæg mengi sem eru ómissandi í umfjöllun okkar. Fyrst skoðum við rúm allra mögulegra snertla og staðsetninga á víðáttunni. Til að gera það þá þurfum við fyrst að skilgreina snertiplan punktsinns p. Látum D_p vera mengi allra varpana frá $\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ sem eru þjálar í grennd um p. Þá getum við skilgreint snertibundin.



Mynd 1: Dæmi um samfellda vörpun milli tveggja víðátta.

Skilgreining 1.11. Látum $\mathcal{M}$ vera n-víða víðáttu og látum $p \in M$. Við köllum mengi allra línulegra varpana $v_p : D_p \to \mathbb{R}$ sem hægt er að lýsa sem

$$v_p(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d(f(\gamma))}{dt}\Big|_{t=0}$$

snertirúm $\mathcal{M}$ í punktinum p ef $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \to M$ er þjál vörpun með $\gamma(0) = p$. Við táknum snertirúm í punktinum p með $T_p\mathcal{M}$. Við köllum svo

$$T\mathcal{M} = \{(x, y) | x \in \mathcal{M}, y \in T_x\mathcal{M}\}$$

snertibundin á $\mathcal{M}$.

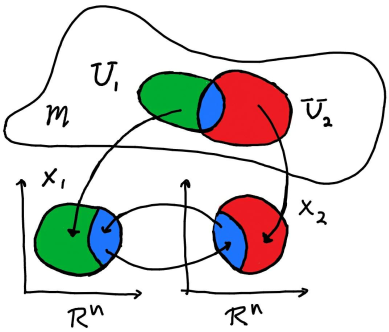
Ef við ættum að yfirfæra aflfræði Lagrange á almennar víðáttur þá myndi ástandsrúm hennar vera $T\mathcal{M}$ (mynd 1.2). Skoðum nú nykursnertibundin.

Skilgreining 1.12. Látum $\mathcal{M}$ vera n-víða víðáttu og látum $p \in M$. Við köllum mengi allra línulegra varpana $\omega_p : T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ nykursnertirúm punktsins p á $\mathcal{M}$ og táknum það með $T_p^*\mathcal{M}$. Við köllum

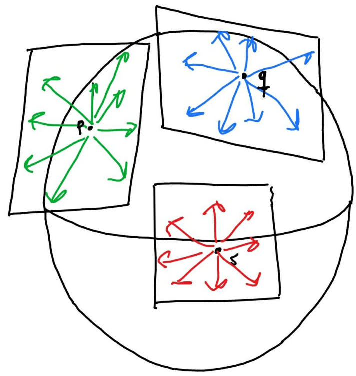
$$T^*\mathcal{M} = \{(x, y) | x \in \mathcal{M}, y \in T_x^*\mathcal{M}\}$$

nykursnertibundin á $\mathcal{M}$.

Í tilfellinu sem við skoðuðum í fyrsta kafla þá var skriðþunginn línuleg vörpun af hraðanum, $p = \frac{\partial L}{\partial v}$ svo (q, p) er einmitt stak í $T^*\mathbb{R}^3$. Ef við myndum vilja alhæfa þetta fyrir Lagrange-fall $L : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ þá vitum við að fyrir sérhvern punkt $x \in \mathcal{M}$ að til er kort $q(x) = (q^1(x), ..., q^n(x))$ í grennd við x. Þá er hægt að skrifa sérhvert $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$ sem $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ þar sem a^i-in eru ótvírætt ákvörðuð. Við getum því skilgreint $v^i(\mathbf{v}) = a^i$. Þá er



Mynd 2: Víðátta og tvö kort sem skerast.



Mynd 3: Snertibundin á kúlu, þrjú stök.

$(q^1, ..., q^n, v^1, ..., v^n)$ kort á TM í grennd við (q, v). Þá er hægt að leggja merkingu í bæði $(q^1, ..., q^n, \frac{\partial L}{\partial q^1}\Big|_{(q,v)}, ..., \frac{\partial L}{\partial q^n}\Big|_{(q,v)}) \in T\mathcal{M}$ og $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)\Big|_{(q,v)} \in T^*\mathcal{M}$, með $p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}$ fyrir lagrange-fallið.

Skilgreining 1.13. Látum $\mathcal{M}$ vera diffranlega víðáttu. Þjált 1-diffurform á $\mathcal{M}$ er vörpun

$$\omega : \mathcal{M} \to T^*\mathcal{M},$$

sem hefur þann eiginleika að fyrir sérhvert $p \in M$ þá er $\omega_p \in T_p^*\mathcal{M}$ þar sem $\omega(p) = (p, \omega_p)$.

Þar að auki gildir fyrir sérhvert $p \in \mathcal{M}$ og öll þjál vigursvið að fallið f sem gefið er með

$$f(p) = \omega_p(X(p))$$

er þjált með tilliti til p.

1-diffurform er því aðferð til þess að skilgreina vörpun á $\mathcal{M}$ sem skilar okkur falli sem breytist samfellt frá hverjum punkti yfir í annan. Þetta tiltekna fall tekur inn gildi frá $T\mathcal{M}$ og tekur svo gildi sín í $\mathbb{R}$. Hægt er að framlengja þessa skilgreiningu almennt í k-diffurform eins og hér að ofan nema þá er $\omega_p \in T^*\mathcal{M} \times ... \times T^*\mathcal{M}$ k sinnum. k-diffurform eru því leið til þess að fá k-línulegt fall á $\mathcal{M}$ sem tekur gildi sín á $\mathbb{R}$ sem breytast samfellt með tilliti til staðsetningar á víðáttunni. Þetta gefur okkur aðferð til að mæla fjarlægðir á víðáttunni, mæla flatarmál eða í okkar tilfelli að samsvara Hamilton-fallið við víðáttuna.

Lítum nú á nykursnertibundin $T^*\mathcal{M}$ í $x = (x_q, x_p) \in \mathcal{M}$. Gerum ráð fyrir að við höfum kort $(U, (q, p))$, $q(x) = (q^1(x), ..., q^n(x))$, $p(x) = (p_1(x), ..., p_n(x))$ í grennd við x. Þá myndar

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial q^1}, ..., \frac{\partial}{\partial q^n}, \frac{\partial}{\partial p_1}, ..., \frac{\partial}{\partial p_n} \right\}$$

grunn fyrir $T(T^*\mathcal{M})$. Við getum síðan skilgreint föllin

$$dq^i(\frac{\partial}{\partial q^j}) = \delta^i_j, \quad dq^i(\frac{\partial}{\partial p_j}) = 0$$
$$dp_i(\frac{\partial}{\partial p_j}) = \delta^j_i, \quad dp_i(\frac{\partial}{\partial q^j}) = 0$$

þau mynda grunn fyrir $T^*(T^*\mathcal{M})$.

Skilgreining 1.14. Látum $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ vera þjált fall. Ytri afleiða fallsinns f er 1-diffurformið, táknað með df, skilgreint með

$$df(V) = V(f),$$

fyrir sérhvert þjált vigursvið V á $T\mathcal{M}$.

Skilgreining 1.15. 2-diffurformið ω kallast samfléttað diffurform ef fyrir sérhvert $\omega_p = \omega(p)$ þá er

1. ω_p er óúrkynjað, þ.e. ef $\omega_p(X, Y) = 0$ fyrir öll Y þá er $X = 0$.

2. ω_p er lokað, þ.e. $d\omega_p = 0$.

3. ω_p er mishverft, þ.e. $\omega(V, V) = 0$.

Skilgreining 1.16. Samflétt víðátta er tvenndin $(\mathcal{M}, \omega)$ þar sem $\mathcal{M}$ er víðátta og ω er samfléttað diffurform.

Dæmi um samflétta víðáttu er $\mathbb{R}^{2n}$ með hnit $x_1, .., x_n, y_1, ..., y_n$ og 2-diffurformið

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

Setning 1.17. *(Darboux) Látum ω vera óúrkynjað 2-diffurform á víðáttu $\mathcal{M}^{2n}$. Þá er $d\omega = 0$ þá og því aðeins að fyrir sérhvert $\wp \in \mathcal{M}^{2n}$ er til kort $x = (p_1, .., p_n, q_1, ..., q_n)$ í grennd við $\wp$ þannig að*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i.$$

Við köllum kortið sem lýst er hér að ofan *Darboux kortið.* Sönnun á þessari setningu má finna í [6, p. 604-605]. Þessi niðurstaða hefur í för með sér að allar samfléttar víðáttur af sömu vídd eru einsmóta í grennd við sérhvern punkt. Það er hægt að notfæra sér diffurform almennt í Riemann rúmfræði til þess að mæla flatarmál á víðáttu. Þá hefur sveigja mikið að segja um hvernig flatarmálið er reiknað og þá er formið sem notað er alls ekki alltaf eins í grennd við sérhvern punkt á víðáttunni.

Setning 1.18. *Látum ω vera samfléttað diffurform á endanlegu vigursviði V. Skilgreinum $i_{\mathbf{v}} : V \to \mathbb{R}, i_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \omega(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ þá er vörpunin $\phi : V \to V^*$ sem skilgreind er með $\phi(\mathbf{v}) = i_{\mathbf{v}}$ einsmótun.*

Sönnun: Sýnum fyrst að $\ker(\phi) = \{0\}$. Látum $\mathbf{v} \in \ker(\phi)$. Þá er $\phi(\mathbf{v})(\mathbf{w}) = \omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ fyrir sérhvert $\mathbf{w} \in V$ en þar sem ω er óúrkynjað þá verður $\mathbf{v} = 0$. En það segir okkur að vörpunin sé eintæk. Látum $T \in V^*$ og $\{\mathbf{u_1}, ..., \mathbf{u_n}\}$ vera hornréttan grunn fyrir vigurúrmið V þ.e.

1. $\omega(\mathbf{u_i}, \mathbf{u_i}) = 1$ fyrir $1 \leq i \leq n$,
2. $\omega(\mathbf{u_i}, \mathbf{u_j}) = 0$ fyrir $i \neq j$.

Slíkan grunn er hægt að smíða á svipaðan hátt og í Gram–Schmidt aðferðinni sem skoðuð var í línulegri algebru. Skilgreinum svo $c_i = T(\mathbf{u_i})$. Þá er hægt að skrifa $\mathbf{v}_T = c_1\mathbf{u_1} + ... + c_n\mathbf{u_n}$. Þar sem ω er línulegt form í fyrsta hnitinu þá fáum við að $\phi(\mathbf{v}_t) = T$ sem segir okkur að $\mathbf{v}_T = \phi^{-1}(T)$. En þá er ϕ átæk vörpun og því gagntæk. $\square$

Það sem þessi setning segir okkur er að við getum samsvarað 1-diffurrformi við vigursvið. Því ef $H : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ er þjált fall, þá er ytri afleiða fallsins dH 1-diffurform. Ef ω er samfléttað from þá er til ótvírætt ákvarðað vigursvið X_H með þann eiginleika að $i_{X_H}(V) = \omega(X_H, V) = dH(V)$ samkvæmt setningu 1.18 hér að ofan. Þegar við förum að skoða aflfræði í sambandi við þessi vigursvið þá lýsa flæðilínur vigursviðsins hreyfingu hlutarins.

Skilgreining 1.19. Vigursviðið X_H sem lýst er hér að ofan kallast Hamilton-vigursvið með Hamilton-falli H.

Þetta er lykillinn að samsvörun milli vigursviðsins sem lýsir hreyfingu á víðáttu við Hamilton-fall sem við skilgreinum. En nú skulum við skoða dæmi í evklíðsku plani til þess að sannfæra okkur að við séum á réttri leið.

Ef $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n}$ með $\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i$ og Hamilton-fall H. Þá ætti

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

en ef $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} (A_i \frac{\partial}{\partial q^i} + B_j \frac{\partial}{\partial p_j})$ er einhver vigur í fasarúminu þá sjáum við að

$$\begin{aligned} i_{X_H}(\mathbf{v}) &= \omega_0(X_H, \sum_{i=1}^{n} (A_i \frac{\partial}{\partial q^i} + B_i \frac{\partial}{\partial p_i})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (B_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + A_i \frac{\partial H}{\partial q^i}) = dH\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial}{\partial p_i} \Big) = dH(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Þetta er í samræmi við það sem við skoðuðum í fyrsta kafla. En nú getum við fundið hvernig hluturinn hreyfist með því að vita í hvaða stöðu við byrjum í og séð hvert hluturinn hreyfist með tilliti til X_H og fylgt svokölluðum flæðilínum.

2 Aflfræði Hamiltons á víðáttum

Við höfum nú lagt grunninn að aðalumræðunni. Við getum því spurt hvernig hægt sé að samsvara Hamilton-falli við hreyfingu á víðáttu. Þegar litið er á aflfræði Hamiltons í evklívsku rúmi er stuðst við fasarúmið sem lýsir öllum mögulegum stöðum og skriðþunga. Við viljum útvíkka þetta rúm þannig að það geti útskýrt hreyfingu hlutar á almennum víðáttum, ekki einungis í evklíðsku rúmi.

Spurningin okkar felst í raun í að vita hvaða skorðum við þurfum að bæta við fasarúmið og hverju er náttúrulegt að gera ráð fyrir. Nú skulum við færa rök fyrir því að fasarúm hlutar (nykursnertibundin) sem ferðast á almennri víðáttu ásamt samfléttuðu diffurformi gefur okkur þær skorður sem við óskum okkur.

Við viljum geta samsvarað Hamilton-falli, sem lýsir oft orku kerfisins, við vigursvið á fasarúminu. Þetta er skynsamleg nálgun vegna þess að vigursviðið segir okkur hver breytingin á eiginleikum hlutarins er sem leiðir okkur beint að breytingu á staðsetningu hlutarins.

Við viljum í fyrsta lagi að eðlisfræðin okkar sé línuleg vegna þess að lögmál Newtons eru línuleg. Svo við viljum finna línulega vörpun til þess að samsvara vigursviði við Hamilton-fall.

Annað sem æskilegt er að gera ráð fyrir er að staðbundin breyting á eiginleikum hlutarins ætti aðeins að vera háð staðbundinni breytingu á Hamiltonfallinu. Þetta segir okkur að við ættum að geta fundið staðbundna hreyfingu hlutar með upplýsingum frá dH. Við viljum því geta tengt vigursvið X_H sem lýsir hreyfingu hlutarins við dH sem er 1-diffurform. Staðbundið vigursvið sem tengt er við staðsetningu er stak í $T\mathcal{M}$ og 1-diffurform á víðáttu $\mathcal{M}$ er stak í $T^*\mathcal{M}$. Við leitum því að gagntækri vörpun $\phi : T\mathcal{M} \to T^*\mathcal{M}$, $X \to dH$. Álíka fyrirbrigði má sjá í setningu 1.18.

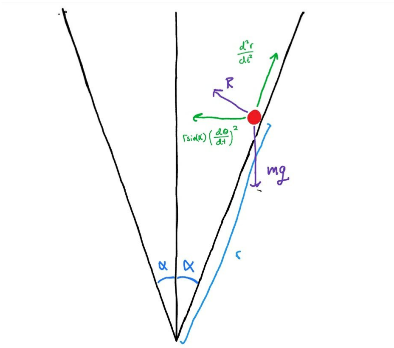
Við höfum ekki enn þá skoðað hvaða strúktúr hefur í för með sér geymni orkunnar. Þegar kerfið er geymið þá gefur H okkur heildarorku kerfisins. Geymni orkunnar er þá jafngild því að $dH(V) = 0$ þegar V lýsir hreyfingu hlutar. Ef orkan er geymin þá er staðbundin breyting á orkunni ekki nein. Það segir okkur að $dH(V) = \omega(V, V) = 0$ fyrir öll vigursvið sem lýsa breytingu á ástandi hlutarins. Jafnvel þótt ekki öll vigursvið lýsi hreyfingu hlutarins þá er fyrir sérhvert stak $(q, \mathbf{v})$ í $T\mathcal{M}$ til ástand á hlut sem hagar sér í grennd við þetta ástand eins og vigursviðið gefur til kynna. Þá verður ω að vera mishverft 2-diffurform.

Seinasta skilyrðið fyrir því að vera samfléttað form sem við höfum ekki ennþá skoðað er að $d\omega = 0$. Ástæðan fyrir því að við ættum að vilja það er ekki eins augljós. Við höfum sýnt fram með setningu 1.17 að allar samfléttaðar víðáttur eru eins, með því að skipta í hentugt hnitakerfi, í grennd við sérhvern punkt. Þessi setning gefur okkur margar áhugaverðar niðurstöður eins og setningu Liouville um flatarmál [6, p.536-538] sem segir til um varðveislu eiginleika. Önnur áhugaverð niðurstaða er Jacobi hlutleysa á Possion hornklofanum sem segir til um frekari samhverfur í kerfinu en við tökum þessar setnigar ekki fyrir hér [1].

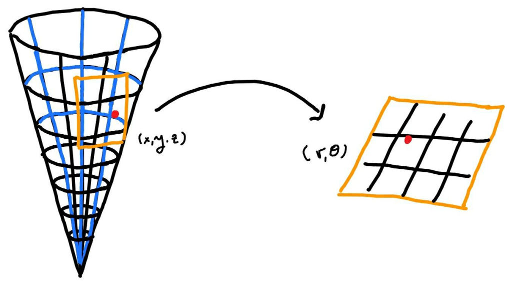
3 Hreyfing á perlu niður keilu

Við skulum skoða hreyfingu á perlu sem ferðast um í keilu sem hefur horn α frá miðju (sjá mynd hér að neðan).

Við skulum gera ráð fyrir því að það sé enginn núningur á perlunni. Jafnvel þótt við séum að skoða verkefnið í $\mathbb{R}^3$ þá erum við í raun ekki með nema tvær frjálsar breytur með tilliti til hreyfingar, þ.e. perlan getur hreyfst upp eða niður keiluna og hún getur hreyfst til vinstri eða hægri. Það segir okkur að perlan ferðast á tvívíðri víðáttu með θ (staðsetningargráða) og r (fjarlægð frá oddpunkti keilu) sem breytur (sjá mynd 5). Hreyfingin á sér stað á tvívíðri víðáttu. Gerum nú ráð fyrir að perlan sé staðsett í fjarlægð r_0 frá oddpunkti, með staðsetningargráðu θ_0 og hornahraða Ω_0.



Mynd 4: Þverskurður af keilu, kraftar og hröðun.



Mynd 5: Kort á keilu.

Skoðum fyrst verkefnið frá sjónarhorni Newtons og svo með tilliti til Hamilton-fallsins. Þeir kraftar sem við þurfum að athuga eru; þyngdarkrafturinn mg, krafturinn sem keilan verkar á perluna R, miðflóttakrafturinn $mr\sin(\alpha)(\frac{d\theta}{dt})^2$ og síðan krafturinn sem verkar á perluna samsíða yfirborði keilunnar $m\frac{d^2r}{dt}$. Skrifum fyrst kraftana upp samsíða x-ásnum og samsíða y-ásnum. Með því að taka tillit til þriðja lögmáls Newtons þá fáum við vigurjöfnuna

$$\begin{pmatrix} R\cos(\alpha) \\ R\sin(\alpha) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} mr\sin(\alpha)(\frac{d\theta}{dt})^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\frac{d^2r}{dt}\sin(\alpha) \\ -m\frac{d^2r}{dt}\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sem er jafngild

$$\begin{pmatrix} R\cos(\alpha) \\ R\sin(\alpha) \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} r\sin(\alpha)((\frac{d\theta}{dt})^2 - \frac{d^2r}{dt}) \\ \frac{d^2r}{dt}\cos(\alpha) + g \end{pmatrix}.$$

Við getum svo athugað að hverfiþungi er varðveittur sem gefur okkur aðra jöfnu, $r^2\frac{d\theta}{dt} = r_0^2\Omega_0$. Við höfum þá þrjár línulega óháðar jöfnur og þrjár óþekktar breytur (R, θ, r) sem gefur okkur nægilegar upplýsingar til að lýsa kerfinu.

Við getum reiknað út kraftana samsíða keilunni og hornrétt á keiluna og fengið að

$$g\cos(\alpha) = r\sin^2(\alpha)(\frac{d\theta}{dt})^2 - \frac{d^2r}{dt^2}, \tag{2}$$

$$R - mg\sin(\alpha) = mr\sin(\alpha)\cos(\alpha)(\frac{d\theta}{dt})^2. \tag{3}$$

Ein slík hreyfing er hringhreyfing en það gerist ef $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$. Sú hreyfing fæst ef $r(\frac{d\theta}{dt})^2 = \frac{g}{\sin(\alpha)\tan(\alpha)}$ með jöfnum 2, 3. Með öðrum orðum, ef perlan byrjar í fjarlægð r_0 frá oddpunkti keilunnar og byrjar með hornahraða

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{r_0\sin(\alpha)\tan(\alpha)}},$$

þá ferðast perlan í hringhreyfingu í fastri fjarlægð r_0 frá oddpunkti keilunnar með fastan hornahraða Ω_0. Ef upphafshraðinn er annar en þetta þá ferðast perlan eftir sporbaug.

Skoðum nú hvenig við myndum leysa þetta verkefni með aðferðum Hamiltons. Þá skoðum við orku kerfisins í stað þess að athuga hverjir kraftar þess eru. Þá skulum við skoða orku perlunnar. Hreyfiorka perlunnar er

$$T = \frac{1}{2}m((\frac{dr}{dt})^2 + r^2\sin^2(\alpha)(\frac{d\theta}{dt})^2)$$

og stöðuorka perlunnar er

$$U = mgr\cos\alpha + C$$

þar sem C er fasti. Þá er lagrange-fall skilgreint með $L = T - U$ og Hamiltonfall sem $H = T + U$. Athugum að

$$P_r = \frac{\partial L}{\partial r} = m\frac{dr}{dt},$$
$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2\sin^2(\alpha)\frac{d\theta}{dt}.$$

Þá getum við skrifað Hamilton-fallið sem

$$H(r,\theta,P_r,P_\theta) = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2\sin^2(\alpha)} + mgr\cos(\alpha) + C.$$

Nú getum við notfært okkur setningu 1.5 en hún segir okkur að til að finna hreyfingu perlunnar þá getum við leyst eftirfarandi diffurjöfnur:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_r}, \quad \frac{dP_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r},$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta}, \quad \frac{dP_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}.$$

Skoðum aðeins tvær af þessum fjórum jöfnum

$$\frac{dP_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{P_r}{m}. \tag{5}$$

Jafna 4 gefur okkur að

$$\frac{dP_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(mr^2 \sin^2(\alpha)\frac{d\theta}{dt}). \tag{6}$$

Þar sem $m\sin^2(\alpha)$ er fasti þá er $r^2\frac{d\theta}{dt}$ það líka. Látum $h = r^2\frac{d\theta}{dt}$. Þá er $P_r = h\sin^2(\alpha)m$ sem gefur okkur ásamt jöfnu 5 hér að ofan að:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dP_r}{dt} &= \frac{P_\theta^2}{mr^3\sin^2(\alpha)} - mg\cos(\alpha) \\ &= m(\frac{h^2m^2\sin^2(\alpha)}{m^2r^3\sin^2(\alpha)} - g\cos(\alpha)) \\ &= m(\frac{h^2\sin^2\alpha}{r^3} - g\cos\alpha). \end{aligned}$$

Sem gefur okkur svo loks að

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{h^2\sin^2\alpha}{r^3} - g\cos\alpha. \tag{7}$$

Ef við látum $v = \frac{dr}{dt}$ þá getum við skrifað

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{dr}{dt}\frac{dv}{dr} = v\frac{dv}{dr}.$$

Látum svo $A = h^2\sin^2\alpha, B = g\cos\alpha$. Þá verður jafna 7 hér að ofan að

$$v\frac{dv}{dr} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{h^2\sin^2\alpha}{r^3} - g\cos\alpha = \frac{A}{r^3} - B$$

þ.e.

$$v\frac{dv}{dr} = \frac{A}{r^3} - B. \tag{8}$$

En við getum heildað báðum megin við jafnaðarmerkið og margfaldað svo með tveimur og fengið að

$$v^2 = A(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}) - 2B(r_0 - r)$$

þar sem r_0 er fjarlægð perlunnar frá oddpunkti keilunnar í upphafsstöðu. Við getum svo einfaldað jöfnuna enn þá meira með því að láta $C = \frac{A}{r_0^2} + 2Br_0$ og þá verður jafnan að

$$v^2 = C - \frac{A}{r^2} - 2Br.$$

Athugum að perlan tekur hágildi eða lággildi þegar $v = 0$ sem við getum leyst fyrir r í jöfnunni

$$0 = Cr^2 - Ar - 2Br^3 \tag{9}$$

Ef við skoðum svo upprunalegu gildin á A, B og C og einföldum jöfnu 9 með því að láta $x = \frac{r}{r_0}$. Þá fáum við jöfnuna:

$$x^3 - (\frac{r_0\Omega_0^2 \sin(\alpha)\tan(\alpha)}{2g} + 1)x^2 + \frac{r_0\Omega^2 \sin(\alpha)\tan(\alpha)}{2g} = 0$$

Þessa jöfnu er hægt að leysa með til dæmis almennu lausnaformúlu þriðja stigs jöfnu sem leiðir okkur að minnstu og mestu fjarlægð frá oddpunkti keilunnar. Þetta getur þá sagt okkur hvaða sporbaug perlan ferðast um [7].

Heimildir

[1] H. Cohn, *Why symplectic geometry is the natural setting for classical mechanics.* https://math.mit.edu/~cohn/Thoughts/symplectic.html.

[2] A. C. da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1 2006.

[3] J. L. Lagrange, *Mécanique analytique*, vol. 1, imprimeur-libraire pour les mathématiques, 1 ed., 1811.

[4] A. McInerney, *First Steps in Differential Geometry: Riemannian, Contact, Symplectic*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2013.

[5] V. G. M. Puletti, *Differential geometry (STÆ519M)*, Fall 2020.

[6] M. Spivak, *Physics for Mathematicians, Mechanics I*, Publish or Perish, INC, 2010.

[7] J. Tatum, *Book: Classical Mechanics (Tatum)*, 12 2020. [Online; accesed 2021-03-17].